Université de Paris X Nanterre
U.F.R. Segmi — Année 2006-2007
Licence Economie-Gestion première année

Cours de Mathématiques II. Chapitre 2

1 Fonctions de plusieurs variables

Ce chapitre est conscré aux fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$, qu'on appellera son domaine de définition. On se limitera essentiellement aux fonctions de 2 ou 3 variables.

Exemple 1. Soit f_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_1(x,y) = (x+y)/(x-y)$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, où Δ est la première bisectrice : $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

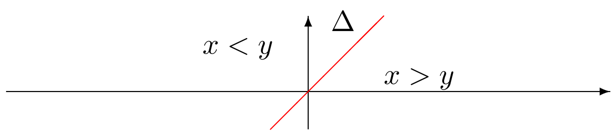

Fig. 1 – Le domaine de définition de f_1

Exemple 2. Soit f_2 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_2(x,y) = xy/\sqrt{1-x^2-y^2}$. Son domaine de définition est le disque unité ouvert $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

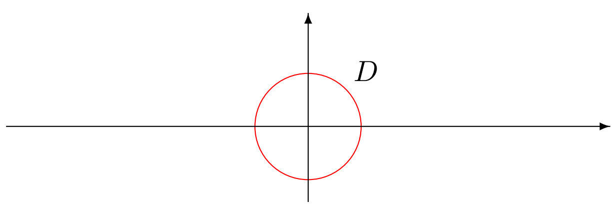

Fig. 2 – Le domaine de définition de f_2

Définition 3 (Graphe et isoclines)**.** *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D à valeurs réelles. Le graphe de f est la surface $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on appelle courbe (ou ligne ou isocline) de niveau c la courbe $\mathcal{I}_c$ définie implicitement par la relation $f(x,y) = c$, i.e. $\mathcal{I}_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$.*

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2+y^2$. Son graphe est un paraboloïde de révolution et ses isoclines sont les cercles $x^2+y^2 = c$ pour $c > 0$. Une telle surface définie comme le graphe d'une fonction de deux variables (x,y) qui ne dépend que de x^2+y^2 est appelée surface de révolution.

Fig. 3 – Une surface et ses isoclines

Exemple 5. Soit f définie par $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$. Les isoclines sont les courbes d'équation $x+y = c(x-y)$, soit les droites passant par l'origine $y = \{(c-1)/(c+1)\}x$.

2 Limite et continuité

En dimension 1, on a vu que la notion de continuité est associée à celle de limite. Une fonction est continue en x_0 si $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$ lorsque x s'approche de x_0, c'est-à-dire lorsque $|x-x_0$ devient petit. En dimension supérieure, pour définir les notions de limite et de continuité, il est tout d'abord nécessaire de définir une notion de proximité, et c'est-à-dire de définir la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Il y a de nombreux choix possibles, mais ils conduisent tous aux mêmes notions de limite et de continuité. Nous en considèrerons un seul, pour sa simplicité.

Définition 6 (Distance)**.** *Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. La distance de u à v, notée $d(u,v)$ est définie par $d(u,v) = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$.*

En particulier, pour $d = 2$, la distance d'un point (x,y) à $(0,0)$ est égale à $|x| + |y|$.

Définition 7 (Limite)**.** *On dit que la fonction f définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$ admet la limite ℓ en u_0 si pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $d_0 > 0$ tel que si $d(u,u_0) \leq d_0$, alors $|f(u) - \ell| \leq \epsilon$. On note*

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = \ell \ .$$

Interprétation Le fait que f admette la limite ℓ en u_0 signifie d'une part que si u est proche de u_0, alors $f(u)$ est proche de ℓ, et surtout que l'on peut obtenir une approximation *arbitraire* de ℓ par une évaluation de f en un point u, à condition que u soit assez proche de u_0.

Remarque 8. Lorsque l'on dit que u s'approche de u_0 au sens de la distance d définie ci-dessus, le chemin par lequel u s'approche de u_0 n'est pas pris en compte. Donc lorsque f admet une limite ℓ en u_0, $f(u)$ s'approche de ℓ quelle que soit la façon dont u s'approche de u_0. Par exemple, en dimension 2, un point (x, y) peut s'approcher de 0 d'une infinité de façon, par exmple :

- le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire que $y = 0$ et x tend vers 0,
- le long de l'axe vertical, i.e. $x = 0$ et y tend vers 0,
- le long de la diagonale, i.e. $x = y$ et tend vers 0,
- le long d'une courbe quelconque, par exemple la parabole $y = x^2$.

Si $\lim_{u \to u_0} f(u) = \ell$, alors quel que soit le chemin que u prend pour aller à u_0, $f(u)$ va à ℓ.

On peut utiliser cette remarque pour montrer a contrario qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné.

Exemple 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

Alors f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, le long d'un axe, par exemple le long de l'axe horizontal, on a $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0$ (la limite est ici considérée pour une fonction de la seule variable x). De même, $f(0, y) = 0$ pour tout $y \neq 0$, et donc $\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0$. Le long de la diagonale $x = y$, on a $f(x, x) = 1/2$ pour tout $x \neq 0$, et donc $\lim_{x \to 0} f(x, x) = 1/2$. La fonction f n'admet donc pas de limite en 0 au sens de la définition 7.

Définition 10 (Continuité)**.** *Une fonction f définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$ est continue en un point u_0 si $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$. Elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. Notamment, les polynômes, les fractions rationnelles aux points où le dénominateur en s'annule pas. Les règles de la continuité des fonctions d'une seule variable s'appliquent : la somme, le produit de fonctions continues sont des fonctions continues. La composée de deux fonctions continues est continue.

3 Fonctions et dérivées partielles

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction défine sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. On appelle i-ème fonction partielle au point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ la fonction f_i, définie sur le domaine $D_i = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in D\}$, par

$$\forall x \in D_i \ , \quad f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \ .$$

Exemple 11. Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Soit $a = (1,-1,2)$. Les fonctions partielles de f en a sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = f(x,-1,2) = 8x\ ,\quad f_2(y) = f(1,y,2) = 8y\ ,\quad f_3(z) = f(1,-1,z) = z\ .$$

Exemple 12. Soit f définie sur le disque D de centre 0 et de rayon 2 par

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\ .$$

Soit $a = (1/2, 1)$. Les deux fonctions partielles de f en a sont

$$f_1 : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}\ ,\quad x \mapsto \sqrt{3-x^2}\ ;$$
$$f_2 : [-\sqrt{15}/2, \sqrt{15}/2] \to \mathbb{R}\ ,\quad y \mapsto \sqrt{15/4-y^2}$$

Définition 13 (Dérivées partielles)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in D$. Si la i-ème fonction partielle de f en a est dérivable en a_i, alors sa dérivée (par rapport à la variable x_i) est appelée i-ème dérivée partielle de f en a, et notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ .$$

Exemple 14. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3y^4$. Alors f admet deux dérivées partielles en tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 3a^2b^4\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 4a^3b^3\ .$$

Exemple 15. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+y)/x-y)$. Alors f admet deux dérivées partielles en tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -2b/(a-b)^2\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b/(a-b)^2\ .$$

Définition 16 (Dérivées partielles d'ordre supérieur)**.** *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. Si ses dérivées partielles d'ordre 1 sont encore dérivable par rapport à chaque variable, leurs dérivées partielles sont appelées dérivées partielles secondes. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre n comme les dérivées partielles des dérivées d'ordre $n-1$.*

Remarque 17. Une dérivée partielle d'ordre n est donc obtenue en dérivant partiellement successivement par rapport à une des variables, n fois. Par exemple, on obtient une dérivée d'ordre 4 d'une fonction de trois variables x, y, z en dérivant d'abord en x, puis en y, puis à nouveau en x, puis en z ; ou bien en dérivant en y puis en z, puis deux fois en x.

Notation La dérivée partielle d'ordre p d'une fonction de n variables $x_1, \dots, x_n$ obtenue en dérivant p_1 fois par rapport à x_1, p_2 fois par rapport à $x_2 \dots p_n$ fois par rapport à x_n, où $p_1, \dots, p_n$ sont des entiers positifs ou nuls tels que $p_1 + \cdots + p_n = p$ est notée

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$$

Exemple 18. Reprenons l'exemple 11 et calculons quelques dérivées partielles successives de $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2z^3 \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0 \ ; \quad \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 2yz^3 \ ,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y,z) = 2z^3 \ , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = 6yz^2 \ ,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x,y,z) = 0 \ .$$

Il est naturel de se demander si dans les dérivées partielles d'ordre au moins 2, l'ordre des dérivations importe. Pour les fonctions usuelles dont toutes les dérivées existent et sont continues sur leur domaine de définition, l'ordre n'importe pas. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 19 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. Soient $i \neq j$ deux entiers compris entre 1 et n. Si les dérivées partielles secondes $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ existent et sont continues, alors elles sont égales.*

Ce résultat sera admis et on admettra aussi qu'il existe des exemples de fonctions pour lesquels les deux dérivées existent en un point mais ne sont pas égales. On ne donnera pas de tels exemples car ils ne seront pas rencontrés en pratique.

Exemple 20. Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^3y}$. Alors, pour $x, y > 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{xy} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3/y} \ ;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt{y/x} \ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{4}\sqrt{x/y^3} \ ;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\sqrt{xy}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{x/y} \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^3/y}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{x/y}$$

Fonctions homogènes

Définition 21 (Cône)**.** *Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un cône si pour tout $x \in C$ et pour tout $t > 0$, on a aussi $tx \in C$.*

Exemple 22. Dans $\mathbb{R}^2$, les parties suivantes sont des cônes : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}_+2$, $\mathbb{R}^2_-$, $C(\theta_1, \theta_2) = \{((x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid \theta_1 \leq \arctan(y/x) \leq \theta_2\}$, où $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$.

Définition 23 (Fonction homogène)**.** *Soit r un réel quelconque. Soit C un cône de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f définie sur C est dite homogène de degré r si pour tout $x \in C$ et pour tout $t > 0$, on a*

$$f(tx) = t^r f(x) \ .$$

Exemple 24. Soit sur $(\mathbb{R}^*_+)^2$ les fonctions f_0, f_1 et f_2 définies respectivement par

$$f_0(x, y) = \log(y/x) \ , \quad f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^3 y} \ .$$

Alors f_i est homogène de degré i, pour $i = 0, 1, 2$.

Théorème 25 (Théorème d'Euler)**.** *Soit f une fonction homogène de degré r sur un cône C de $\mathbb{R}^n$, admettant des dérivées partielles par rapport à toutes les variables. Alors, pour tout $x \in C$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x) \ .$$

Exemple 26. Considérons la fonction f_2 de l'exemple 24. On a calculé ses dérivées partielles dans l'exemple 22. On vérifie alors :

$$x \frac{\partial f_2}{\partial x} + y \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \times \frac{3}{2}\sqrt{xy} + y \times \frac{1}{2}\sqrt{x^3/y} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^3 y} = 2f(x, y) \ .$$

4 Développements limités polynomiaux

Dans le cas des fonctions d'une seule variable, Un développement limité polynomial est une approximation locale (au voisinage d'un point) d'une courbe par une courbe plus simple. Un développement à l'ordre un de f au point x_0 donne la tangente au graphe de f en x_0, et un développement à l'ordre 2 donne le cercle osculateur.

Le graphe d'une fonction de deux variables est une surface. Un développement limité à l'ordre 1 en donnera donc une approximation par un plan : le plan tangent, et un développement limité à l'ordre 2 donera la sphère osculatrice.

Cette section est consacrée aux développements limités à l'ordre au plus deux des fonctions de deux variables.

Définition 27 (Polynôme à deux variables)**.** *Un polynôme à deux variables $P(x,y)$ est une somme de produits de puissances de x et y :*

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} a_{i,j} x^i y^j \ .$$

Si $a_{p,q} \neq 0$, le polynôme P est dit de degré total $p+q$, de degré p en x et de degré q en y.

Exemple 28. Soit $P(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fz^2$. P est de degré 2 si d ou e ou f est non nul. Si $d \neq 0$ et $f = 0$, alors P est de degré 2 en x et 1 en y. Si $d = f = 0$ et $e \neq 0$, P est bien de degré total 2, mais de degré 1 en x et en y.

Définition 29 (Développement limité polynomial)**.** *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet un développement limité polynomial à l'ordre n au point (x_0, y_0) si il existe un polynôme $P(x,y)$ de degré n et une fonction $\epsilon(x,y)$ tels que*

$$f(x,y) = P(x,y) + (|x| + |y|)^n \epsilon(x,y) \ , \tag{1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0 \ . \tag{2}$$

Remarque 30. Les deux termes de l'approximation (1) sont également importants. Le polynôme approximant $P(x,y)$ est appelé terme (ou partie) principal, et le terme $(|x| + |y|)^n \epsilon(x,y)$ est le terme de reste. Cette terminologie est justifiée par la condition (2). Cette condition assure que lorsque (x,y) est très proche de (x_0,y_0), alors le terme de reste est beaucoup plus petit que n'importe quel terme de la partie principale. Si on n'avait pas cette condition, ce terme de reste pourrait être en fait plus grand que les autres, et (1) n'aurait aucun sens. La valeur exacte de la fonction ϵ n'a pas d'importance ; seule la condition (2) est importante.

Remarque 31. Au lieu d'écrire le terme de reste sous la forme $(|x|+|y|)^n\epsilon(x,y)$, on pourrait l'écrire $(|x|^n + |y|^n)\epsilon_1(x,y)$, ou $(|x|^2 + |y|^2)^{n/2}\epsilon_2(x,y)$, où les fonctions ϵ_1 et ϵ_2 satisfont aussi (2). La partie principale serait alors nécessairement la même.

La première conséquence de cette définition est l'unicité du développement limité lorsqu'il existe.

Théorème 32. *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un développement limité polynomial à l'ordre n au point (x_0,y_0), alors il est unique, i.e. si il existe deux polynômes P et Q de même degré n et deux fonctions ϵ et η tels que*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= P(x,y) + (|x-x_0| + |y-y_0|)^n \epsilon(x,y) \\ &= Q(x,y) + (|x-x_0| + |y-y_0|)^n \eta(x,y) \ , \end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \eta(x,y) = 0 \ ,$$

alors $P = Q$ et $\epsilon = \eta$.

Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, l'existence d'un développement limité à l'odre n est assurée par l'exitence de toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n. Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à l'ordre 2.

Théorème 33. *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Si f admet des dérivées partielles en un point (x_0, y_0) de D, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 donné par*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + (|x-x_0| + |y-y_0|)\epsilon(x,y)$$

avec $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$.

Théorème 34. *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en un point (x_0, y_0) de D, alors elle admet un développement limité à l'ordre 2 donné par*

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\ & + (|x-x_0| + |y-y_0|)^2\epsilon(x,y) \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$.

Exemple 35. Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$. Cette fonction est bien définie et admet des dérivées partielles de tout ordre au voisinage du point $(1,-1)$. Calculons son développement limité à l'ordre 2.

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2y}{(x-y)^2}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{(x-y)^2}\ ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{4y}{(x-y)^3}\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4x}{(x-y)^3}\ ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\frac{x+y}{(y-x)^3}\ . \end{gathered}$$

On évalue ces dérivées partielles en $(1,-1)$, on obtient :

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}\ , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{2}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0\ . \end{gathered}$$

On obtient le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1,-1)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\{(x-1)+(y+1)\} - \frac{1}{4}\{(x-1)^2 + (y+1)^2\} + (|x-1| + |y+1|)^2\epsilon(x,y)\ ,$$

avec $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \epsilon(x,y) = 0$.

Règles pratiques de calcul d'un développement limité On peut souvent effectuer des développements limités avec un nombre limité de calculs, en utilisant des développements déjà calculés et quelques règles de calculs simples.

Proposition 36 (Somme de deux développements limités)**.** *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en (x_0, y_0) avec comme parties principales respectives P et Q deux polynômes de degré n, alors $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en (x_0, y_0) avec $P+Q$ comme partie principale.*

Exemple 37*.* Soit f la fonction de l'exemple 35 et soit g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$. Alors g admet un développement limité à l'ordre 2 en $(-1,1)$ donné par

$$\begin{aligned} g(x,y) = 2 &+ \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(y+1) \\ &+ \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{3}{8}(x-1)(y+1) - \frac{3}{16}(y+1)^2 + (|x-1|+|y+1|)^2\epsilon_1(x,y) \ , \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \epsilon_1(x,y) = 0$. En ajoutant les deux développements limités, on en déduit

$$\begin{aligned} f(x,y)+g(x,y) = 2 &+ \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y+1) \\ &- \frac{3}{16}(x-1)^2 + \frac{3}{8}(x-1)(y+1) - \frac{7}{16}(y+1)^2 + (|x-1|+|y+1|)^2\epsilon_2(x,y) \ , \end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \epsilon_2(x,y) = 0$.

Proposition 38 (Produit de deux développements limités)**.** *Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en (x_0, y_0) avec comme parties principales respectives P et Q deux polynômes de degré n, alors fg admet un développement limité à l'ordre n en (x_0, y_0) avec pour partie principale les termes de degré au plus n du produit PQ.*

Exemple 39*.* Considérons à nouveau les fonctions f et g précédentes. Le produit fg admet un développement limité à l'ordre 1 dont la partie principale est $2 \times \frac{1}{2}\{(x-1)+(y+1)\} = (x-1)+(y+1)$. Tous les autres produits donneraient des termes d'ordre au moins 2. On obtient aussi un développement à l'ordre 2 dont la partie principale est le produit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\{(x-1)+(y+1)\} - \frac{1}{4}\{(x-1)^2+(y+1)^2\} \\ &\qquad \times \{2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(y+1) + \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{3}{8}(x-1)(y+1) - \frac{3}{16}(y+1)^2\} \end{aligned}$$

dont on ne garde que les termes de degré au plus 2, soit

$$\begin{aligned} &(x-1)+(y+1) + 2\times(-\frac{1}{4})\{(x-1)^2+(y+1)^2\} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\{(x-1)+(y+1)\} \times \{\frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(y+1)\} \\ &= (x-1)+(y+1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)(y+1) - \frac{7}{8}(y+1)^2 \ . \end{aligned}$$

On remarquera que le fait que la partie principale du développement limité de f ne contienne pas de terme constant (car $f(1,-1)=0$) a simplifié les calculs.

Proposition 40 (Composition de deux développements limités)**.** *Soit g une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et admettant un développement limité à l'ordre 2 en (x_0, y_0) de partie principale un polynôme $Q(x,y)$ de degré 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant un développement limité à l'ordre 2 en $z = g(x_0, y_0)$ avec pour partie principale un polynôme de degré 2 à une variable $P(z)$. La fonction composée $f \circ g$ admet alors un développement limité à l'ordre 2 en $z = g(x_0, y_0)$ avec pour partie principale les termes de degré au plus 2 du polynôme à deux variables $P(Q(x,y))$.*

Exemple 41. Soit g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \sin(x+y^2)$ et soit $f(z) = \exp(z)$. La fonction g admet un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ avec pour partie principale

$$Q(x,y) = x + y^2$$

On connait la partie principale du développement à l'ordre de f en zéro

$$P(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 \; .$$

La partie principale du développement à l'ordre 2 de $\exp\{\sin(x+y)\}$ est donc obtenue en gardant les termes de degré au plus 2 de

$$P(Q(x,y)) = 1 + Q(x,y) + \frac{1}{2}Q^2(x,y) \; ,$$

soit

$$\exp\{\sin(x+y^2)\} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + (x^2+y^2)\epsilon(x,y) \; ,$$

avec $\lim_{(x,y)\to 0} \epsilon(x,y) = 0$.

5 Extrema

Le but de cette section est de trouver des conditions pour qu'un point (x_0, y_0) soit un point extrémal d'une fonction de deux variables. Dans le cas d'une fonction dérivable d'une seule variable, on sait que la dérivée première s'annule en un extremum. La nature de l'extremum, minimum ou maximum dépend de la dérivée seconde si elle existe. Dans le cas d'une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles à l'ordre 2, si (x_0, y_0) est un extremum, alors les dérivées partielles sont nulles. La nature de l'extremum est alors donnée par les dérivées partielles secondes. La situation est plus complexe que dans le cas d'une seule variable.

Théorème 42. *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 en (x_0, y_0). Si (x_0, y_0) est un extremum, alors les deux dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent en (x_0, y_0).*

Exemple 43. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ses dérivées premières sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \ .$$

Les dérivées premières s'annulent donc simultanément uniquement en $(0,0)$.

Exemple 44. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = xy$. Ses dérivées premières sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \ .$$

Les dérivées premières s'annulent donc simultanément uniquement en $(0,0)$.

La première partie de la recherche d'un extremum consiste donc à trouver les points d'annulation des dérivées partielles premières. Une fois ces points trouvés, il faut en déterminer la nature. Un point où les dérivées partielles première s'annule n'est pas nécessairement un extremum. Un tel point est appelé point stationnaire. Soit (x_0, y_0) un point stationnaire de la fonction f. Trois cas peuvent se produire :

- (x_0, y_0) est un maximum, c'est-à-dire qu'il existe un domaine D autour de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$;
- (x_0, y_0) est un minimum, c'est-à-dire qu'il existe un domaine D autour de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$;
- (x_0, y_0) n'est ni un maximum, ni un minimum, c'est-à-dire que pour tout domaine D contenant (x_0, y_0), contient aussi des points (x,y) et $(x'y')$ tels que $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ et $f(x', y') > f(x_0, y_0)$. Un tel point est appelé point selle.

Pour distinguer de tels extrema, il est nécessaire de considérer la dérivée seconde.

Théorème 45. *Soit f une fonction admettant des dérivées partielles secondes continues au point (x_0, y_0). Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)y^2 \ .$$

- *Si la signature de q est $(2,0)$, i.e. si q est définie positive, alors (x_0, y_0) est un minimum ;*
- *si la signature de q est $(0,2)$, i.e. si q est définie négative, alors (x_0, y_0) est un maximum ;*
- *si la signature de q est $(1,1)$, alors (x_0, y_0) est un point selle.*

Remarque 46. Dans les autres cas, c'est-à-dire si la signature de q est $(1,0)$ ou $(0,1)$, on ne peut pas conclure ; on pourrait être dans n'importe lequel des trois cas.

Idée de la preuve. La preuve formelle repose sur un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de (x_0, y_0). Puisque (x_0, y_0) est un point stationnaire les dérivées partielles premières de f sont nulles. Le développement limité à l'ordre 2 prend donc la forme :

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + q(x - x_0, y - y_0) + \text{ reste } \ .$$

Une preuve rigoureuse nécessiterait de considérer le terme de reste avec précision. Nous admettrons que l'on peut le négliger, si (x, y) est assez proche de (x_0, y_0). On voit clairement alors que si q est définie positive, alors pour tout (x, y) proche et distinct de (x_0, y_0), on a $q(x - x_0, y - y_0) > 0$, et donc $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, ce qui prouve que (x_0, y_0) est un minimum. On prouve les deux autres cas de la même façon. $\square$

Exemple 47. Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a déjà vu que son seul point stationnaire est $(0, 0)$. Les dérivées partielles secondes sont constantes égales à $2, 0, 2$. La signature de la forme quadratique est $(2, 0)$, et $(0, 0)$ est donc un minimum.

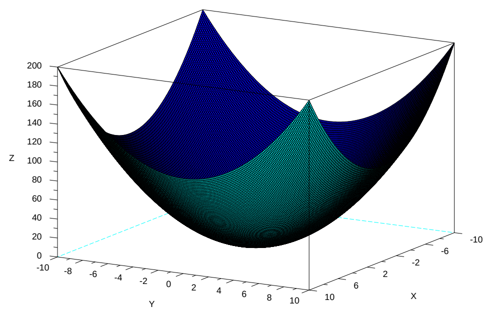

Fig. 4 – Paraboloïde de révolution

Exemple 48. Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. Son seul point stationnaire est $(0, 0)$. La forme quadratique associée aux dérivées partielles secondes est

$$q(x, y) = xy = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 \ .$$

Sa signature est $(1, -1)$, on a donc un point selle.

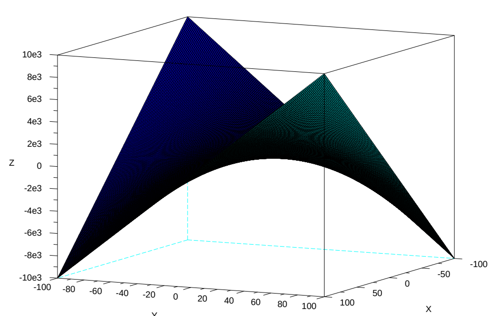

Fig. 5 – Un point selle